ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений аргумент обозначают, как правило, через t, а сами неизвестные функции – через $x_1(t),\ \ x_2(t)$ и т.д. Так, система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями записывается обычно в виде

$$\begin{cases} \varphi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right)=0, \\ \\ \psi\left(t,\ x_1,\ x_2,\ \dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}\right)=0. \end{cases} \tag{1}$$

На системы дифференциальных уравнений естественным образом обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения. Например, в случае системы (1) задача Коши состоит в нахождении решения $x_1(t),\ \ x_2(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x_1(t_0)=x_1^0,\ \ x_2(t_0)=x_2^0$, где $t_0,\ x_1^0,\ x_2^0$ - заданные числа. Для случая системы может быть доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме из § 30.

К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения (и системы уравнений) любого порядка. Проиллюстрируем это на примере уравнения третьего порядка. Пусть дано уравнение

$$y'''=f(x,\ y,\ y',y'').$$

Если обозначить функции y' и y'' соответственно через u и v, то уравнение можно заменить системой

$$\begin{cases} y'=u, \\ \\ u'=v, \\ \\ v'=f(x,\ y,\ u,\ v), \end{cases}$$

состоящей из трех уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями $y(x),\ u(x),\ v(x)$. Аналогичное истолкование допускает любое другое дифференциальное уравнение (или система уравнений).

Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений специального вида, называемых **линейными системами.** В случае двух неизвестных функций $x_1(t),\ \ x_2(t)$ линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты α_{ij} являются, вообще говоря, функциями независимой переменной t. Будем считать эти функции непрерывными; тогда для заданной системы заведомо выполняются условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Один из методов интегрирования системы (2) заключается в сведении системы к одному уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией (о сведении одного уравнения произвольного порядка к системе уравнений первого порядка было сказано в п.1). Дифференцируя (по t) обе части первого уравнения системы (2), находим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}\frac{dx_1}{dt} + \alpha_{12}\frac{dx_2}{dt} + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2,$$

откуда, заменяя производные $\dfrac{dx_1}{dt},\ \dfrac{dx_2}{dt}$ их выражениями из самой системы, имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \alpha_{12}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2.$$

Группируя в правой части все члены с x_1, а также с x_2, получим уравнение вида

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \tag{3}$$

где коэффициенты β_1 и β_2 определенным образом выражаются через коэффициенты α_{ij} и их производные (записывать эти выражения не будем). Комбинируя уравнение (3) с первым уравнением системы (2), получаем

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения t определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда систему (4) можно решить относительно x_1 и x_2, т.е. выразить x_1 и x_2 через $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{d^2x_1}{dt^2}$. В результате приходим к уравнениям вида

$$x_1 = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{5}$$

$$x_2 = c\frac{dx_1}{dt} + d\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{6}$$

(выражения для a, b, c, d приводить не будем). Первое из них представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $x_1(t)$.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + tg^2 t - 1, \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + tgt. \end{cases}$$

Решение

Продифференцируем по переменной t второе уравнение системы. Получим:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Подставим в полученное уравнение $\frac{dx_1}{dt}$ из первого уравнения. В результате будем иметь:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\left(x_2 + tg^2 t - 1\right) + \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Воспользовавшись формулой $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + x_2 + tg^2 t$, придем к линейному неоднородному уравнению второго порядка относительно $x_2(t)$:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = 2.$$

Решим полученное уравнение. На основании теоремы о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения

$$x_2 = x_{2\ oo} + x_{2\ ч.н.}$$

где $x_{2\ oo}$ - общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+x_2=0,$$

$x_{2\ ч.н.}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению, имеет вид $k^2+1=0$. Его корни $k_{1,2}=\pm i$. Следовательно,

$$x_{2\ oo}=c_1cost+c_2\sin t.$$

Так как правая часть неоднородного уравнения равна действительному числу, $x_{2\ ч.н.}=A$. Очевидно $A=2$. Таким образом:

$$x_2(t)=c_1cost+c_2\sin t+2\ .$$

Функцию $x_1(t)$ найдем из второго уравнения системы:

$$x_1=tgt-\frac{dx_2}{dt}=tgt-c_1\sin t-c_2\cos t.$$

Таким образом,

$$x_1=tgt-c_1\sin t-c_2\cos t,$$
$$x_2(t)=c_1cost+c_2\sin t+2.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1-2x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1-x_2.\end{cases}$$

Решение

Дифференцируя обе части первого уравнения, имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=3\frac{dx_1}{dt}-2\frac{dx_2}{dt}=3(3x_1-2x_2)-2(2x_1-x_2)=5x_1-4x_2.$$

В комбинации с первым уравнением данной систем это приводит к системе

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1-2x_2,\\ \dfrac{d^2x_1}{dt}=5x_1-4x_2.\end{cases}$$

Отсюда находим выражения для x_1 и x_2 через $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}$:

$$x_1 = 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}, \tag{7}$$

$$x_2 = \frac{5}{2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2}. \tag{8}$$

В результате приходим к уравнению второго порядка для неизвестной функции $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0.$$

Решая это уравнение известным способом, получим

$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^t,$$

после чего из выражения (8) находим

$$x_2 = \frac{1}{2}(2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t.$$

Пример. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + cost, \\ \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 + 2\sin t. \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям $x_1(0) = -\frac{5}{2}$, $x_2(0) = 1$.

Решение.

Продифференцируем по переменной t второе уравнение системы:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = x_1 + 2\sin t.$$

Подставляя в полученное уравнение $\frac{dx_1}{dt}$ из первого уравнения, а x_1 из второго уравнения системы, получим уравнение

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - 2\frac{dx_2}{dt} = -4\sin t + \cos t.$$

Решим полученное уравнение:

$$x_2 = x_{2\ oo} + x_{2\ ч.н.}$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1$ и, следовательно,

$$x_{2\ oo} = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Вид правой части неоднородного уравнения позволяет записать его частное решение с неопределенными коэффициентами в виде

$$x_{2\ ч..н.} = A\sin t + B\cos t.$$

Найдем $x'_{2\ ч..н.}$, $x''_{2\ ч..н.}$ и подставим в неоднородное уравнение. Используя метод неопределенных коэффициентов находим, что $A = -\frac{1}{2}$ и $B = -2$ и тогда $x_{2\ ч.н.} = -2cost - \frac{1}{2}\sin t$.

Таким образом:

$$x_{2.}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - 2cost - \frac{1}{2}\sin t\,.$$

Функцию $x_1(t)$ найдем из второго уравнения заданной системы:

$$x_{1.}(t) = \frac{1}{2}cost - e^t(c_1 + c_2 + c_2 t).$$

Общее решение заданной системы найдено и имеет вид

$$x_{1.}(t) = \frac{1}{2}cost - e^t(c_1 + c_2 + c_2 t),$$

$$x_{2.}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - 2cost - \frac{1}{2}\sin t.$$

Составим систему для нахождения частного решения, удовлетворяющего заданным условиям: $x_1(0) = -\frac{5}{2}$, $x_2(0) = 1$.

Система будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - c_1 - c_2 = -\frac{5}{2}, \\ c_1 - 2 = 1, \end{cases} \Rightarrow c_1 = 3,\ \ c_2 = 0$$

Искомое частное решение:

$$x_{1.}(t) = \frac{1}{2}cost - 3e^t,$$

$$x_{2.}(t) = 3e^t - 2cost - \frac{1}{2}\sin t.$$

Упражнения

1. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

2. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 \end{cases}$$

3. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2 + 2, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3, \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3. \end{cases}$$

5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_1 = e^t, \\ \\ 2x_1' + x_2' + 2x_2 = \cos t \end{cases}$$

при данных начальных условиях $t_0 = 0, \quad x_0 = -\dfrac{3}{17}, \quad y_0 = \dfrac{4}{17}$.